§3 Konforme Parametrisierungen, die Weierstraß Darstellung für Minimalflächen

Interessiert man sich für solche Eigenschaften einer Fläche, die nicht von der Parametrisierung abhängen, so kann man zur Diskussion dieser Eigenschaften möglichst "gute" lokale Koordinatensysteme einführen. Es stellt sich heraus, daß sogenannte konforme Parameter viele Vorzüge in sich vereinen (geometrische Größen der Fläche S nehmen in konformen Koordinaten eine besonders einfache Form an).

<u>DEFINITION</u>: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $F : \Omega \to S$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$ ein lokales Koordinatensystem. F heißt <u>konform</u>, falls

$$|\partial_1 F| = |\partial_2 F| \quad , \quad \partial_1 F \cdot \partial_2 F = 0$$

auf dem Definitionsgebiet Ω gilt.

Obige Bedingung sagt, daß die kanonischen Tangentenvektoren $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ stets gleichlang sind und zudem aufeinander senkrecht stehen. Man überlegt sich leicht, daß konforme Parametrisierungen <u>winkeltreu</u> sind: schneiden sich zwei ebene Kurven γ_1, γ_2 in Ω unter dem Winkel α, so ist auch der Schnittwinkel der Bildkurven $F(\gamma_1), F(\gamma_2)$ durch α gegeben. Eine in voller Allgemeinheit nicht einfach zu beantwortende Frage ist natürlich die nach der Existenz von konformen Koordinatensystemen bei vorgelegter Fläche S. Dies werden wir später im Spezialfall klären, vorab begnügen wir uns mit einigen elementaren Aussagen.

Ist $F : \Omega \to S$ konform, so setzt man

$$\lambda^2 := |\partial_1 F|^2 \quad (= |\partial_2 F|^2)$$

und sieht

$$g_{ij} = \lambda^2 \cdot \delta_{ij}$$

für die 1^{te} Fundamentalform g von S, speziell ist

$$\det g = \lambda^4 .$$

<u>LEMMA 3.1:</u> Ist F konforme Parametrisierung von S und bezeichnet $\underline{\underline{H}}$ die auf S erklärte vektorielle mittlere Krümmung, so gilt

$$\Delta F = 2 \cdot \lambda^2 \, \underline{\underline{H}}(F),$$

insbesondere steht der komponentenweise gebildete Laplace Operator ΔF auf S in den entsprechenden Bildpunkten von F senkrecht.

<u>BEMERKUNG:</u> Definiert man die mittlere Krümmung H bzgl. des natürlichen Normalenfeldes

$$\partial_1 F \times \partial_2 F \,/\, |\partial_1 F \times \partial_2 F| ,$$

so ist

$$\underline{\underline{H}}(F) = H(F) \cdot \partial_1 F \times \partial_2 F \cdot \lambda^{-2} ,$$

wir bekommen die sogenannte

H-Flächengleichung: $\quad \Delta F = 2 \cdot H \circ F \; \partial_1 F \times \partial_2 F ,$

die folgende Bedeutung hat: zu gegebener Funktion $H: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (und vorgeschriebenen Randbedingungen) sucht man Lösungen F der Gleichung auf Ω, die zusätzlich noch die Konformitätsrelation erfüllen. Die Bilder $F(\Omega)$ sind dann Flächen, die in jedem Punkt $F(u,v)$ die mittlere Krümmung $H(F(u,v))$ haben. Die Wahl $H \equiv 0$ führt als Spezialfall auf die Theorie konform parametrisierter Minimalflächen. Das H-Flächen-system hat eine sehr komplizierte Struktur, Existenz- und Regularitätssätze sind erst in den letzten Jahren bewiesen worden, und es gibt immer noch viele offene Fragen.

Beweis von Lemma 3.1: Sei

$$N(u,v) = \partial_1 F \times \partial_2 F \Big/ |\partial_1 F \times \partial_2 F| \quad (u,v)$$

(also $\mathcal{N} \circ F = N$). Wir zeigen

$$\Delta F \cdot \partial_i F = 0,$$

was sofort $\Delta F = \vartheta \cdot N$ mit einer geeigneten reellen Funktion $\vartheta: \Omega \to \mathbb{R}$ impliziert. Es ist

$$\partial_1\partial_1 F \cdot \partial_1 F = \frac{1}{2}\partial_1 |\partial_1 F|^2 = \frac{1}{2}\partial_1 |\partial_2 F|^2 =$$

$$\partial_2 F \cdot \partial_1\partial_2 F = \partial_2 F \cdot \partial_2\partial_1 F = \partial_2 \underbrace{(\partial_2 F \cdot \partial_1 F)}_{=0} - \partial_2\partial_2 F \cdot \partial_1 F$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta F \cdot \partial_1 F = 0,$$

und die andere Relation folgt ganz analog.

Es gilt andererseits

$$H(F) = \frac{1}{2}\frac{1}{\det g}\left[|\partial_2 F|^2 \cdot \mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) + |\partial_1 F|^2 \cdot \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \lambda^{-4}\cdot \lambda^2 \cdot \left[\mathrm{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) + \mathrm{II}(\partial_2 F, \partial_2 F)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot \lambda^{-2} \left[\partial_1 F \cdot \partial_1 N + \partial_2 F \cdot \partial_2 N \right].$$

Beachtet man

$$\partial_i F \cdot \partial_i N = \partial_i \big(\overbrace{\partial_i F \cdot N}^{=0}\big) - N \cdot \partial_i \partial_i F,$$

so folgt:

$$H \circ F = \frac{1}{2}\cdot \lambda^{-2} \quad \Delta F \cdot N = \frac{1}{2} \lambda^{-2} \cdot \vartheta \quad \Longrightarrow$$

$$\vartheta = 2 \cdot \lambda^2 \cdot H \circ F,$$

also $\Delta F = 2 \cdot \lambda^2 \underbrace{H \circ F \cdot N}_{= \underline{\underline{H}} \circ F}.$ ■

Als Korollar bekommt man

LEMMA 3.2: Sei F konforme Parametrisierung der Klasse C^2 einer Fläche S. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} S \text{ ist Minimalfläche (im Sinne von } H = 0) \iff \\ F \text{ ist harmonisch (also } \Delta F = 0). \end{array}}$$

Wir wollen nun kurz andeuten, wie man konform parametrisierte Minimalflächen mit funktionentheoretischen Methoden beschreiben kann. Sei dazu

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \quad , \; \Omega \subset \mathbb{R}^2 ,$$

eine beliebige Abbildung der Klasse C^2. Bezeichnen wir die Variablen in Ω mit x_1 und x_2, so sei

$$(1) \quad \phi_k(z) := \frac{\partial}{\partial x_1} F^k(z) - i \frac{\partial}{\partial x_2} F^k(z),$$

$$z = x_1 + i x_2 \in \Omega \subset \mathbb{C}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Es folgt:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(z) &= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x_1}(z) \right)^2 - \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x_2}(z) \right)^2 \\ &\quad - 2i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial F^k}{\partial x_1}(z) \cdot \frac{\partial F^k}{\partial x_2}(z) \\ &= |\partial_1 F|^2(z) - |\partial_2 F|^2 - 2i \, \partial_1 F(z) \cdot \partial_2 F(z), \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{3} |\phi_k|^2(z) = |\partial_1 F(z)|^2 + |\partial_2 F(z)|^2 ,$$

und man erkennt sofort folgende Aussagen:

a) $\boxed{\phi_k \text{ holomorph auf } \Omega, \; k = 1,2,3 \iff F \text{ ist harmonisch.}}$

Beweis:
$$\Delta F^k = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} F^k\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} F^k\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\,\phi_k\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathrm{Im}\,\phi_k\right)$$

Also:
$$\Delta F^k = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{Re}\,\phi_k) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{Im}\,\phi_k).$$

Die Gleichung
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{Re}\,\phi_k) = -\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{Im}\,\phi_k)$$
folgt aber sofort aus der Definitionsgleichung (1) für ϕ_k, denn die zweiten Ableitungen von F^k sind ja symmetrisch. Mithin verschwindet der Laplace Operator von F^k genau dann, wenn ϕ_k die Cauchy Riemann Differentialgleichungen erfüllt, also eine auf Ω holomorphe Funktion darstellt.

b) $\boxed{F \text{ erfüllt die Konformitätsrelation } |\partial_1 F| = |\partial_2 F|,\ \partial_1 F \cdot \partial_2 F = 0 \iff \sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 \equiv 0 \text{ auf } \Omega.}$

Beweis: vgl. (2).

c) $\boxed{F \text{ erfülle die Konformitätsrelation. Dann: } \mathrm{Rang}\, DF(z) = 2 \text{ auf } \Omega \iff \sum_{k=1}^{3} |\phi_k|^2(z) > 0 \text{ in jedem Punkt.}}$

Beweis: $\mathrm{Rang}\, DF(z) = 2 \iff |\partial_1 F(z) \wedge \partial_2 F(z)| > 0 \iff$

$$|\partial_1 F(z)|^2 \cdot |\partial_2 F(z)|^2 - (\partial_1 F \cdot \partial_2 F)^2 > 0 \underset{\text{(Konformitätsrelation)}}{\Longleftrightarrow}$$

$$|\partial_1 F(z)|^4 > 0 \underset{\text{(Konformitätsrel.)}}{\Longleftrightarrow} |\partial_1 F(z)|^2 + |\partial_2 F(z)|^2 > 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{3} |\phi_k(z)|^2 > 0$$

■

Als Konsequenz liest man ab

<u>LEMMA 3.3</u>: Sei $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ konforme Parametrisierung (im Sinne der Definition zu Beginn von §2, wobei eben zusätzlich die Konformitätsrelation gelten soll) eines Teils der Minimalfläche S (Minimalfläche hier: $H = 0$). Dann gilt:

$$\phi_k(z) := \partial_1 F^k(z) - i\, \partial_2 F^k(z), \quad k = 1, 2, 3,$$

ist holomorph auf Ω mit $\sum_{k=1}^{3} \phi_k(z)^2 = 0$, $\sum_{k=1}^{3} |\phi_k(z)|^2 > 0$ in jedem Punkt $z \in \Omega$. ■

Nun sind wir aber eigentlich an Verfahren zur Erzeugung von Minimalflächen interessiert, und Lemma 3.3 geht gerade wieder den anderen Weg. Um Minimalflächen zu konstruieren, gehen wir aus von drei holomorphen Funktionen

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \to \mathbb{C}$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und verlangen:

$$(4) \qquad \phi_1^2(z) + \phi_2^2(z) + \phi_3^2(z) = 0, \quad |\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 + |\phi_3(z)|^2 > 0$$

in jedem Punkt $z \in \Omega$. Ist Ω <u>einfach zusammenhängend</u>, so gibt es zu ϕ_k eine bis auf additive Konstanten eindeutige komplexe Stammfunktion, zum Beispiel ist die Wahl

$$\Psi_k(z) := \int_{z_0}^{z} \phi_k(\xi)\, d\xi$$

möglich; wo $\int_{z_0}^{z}$ die Integration längs eines beliebigen Weges in Ω von z_0 nach z bedeutet und z_0 für einen beliebigen aber festen Basispunkt steht.

Nun setzt man

$$(5) \qquad \boxed{F^k(z) := \operatorname{Re} \Psi_k(z), \quad z \in \Omega}$$

und gewinnt eine reell analytische Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, für die offenbar gilt:

$$\partial_1 F^k - i\,\partial_2 F^k = \partial_1 \operatorname{Re} \Psi_k - i\,\partial_2 \operatorname{Re} \Psi_k \overset{\text{C.R. Gln. für } \Psi_k}{=}$$

$$\partial_1 \operatorname{Re} \Psi_k + i\,\partial_1 \operatorname{Im} \Psi_k = \frac{d}{dz} \Psi_k = \phi_k,$$

denn für jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist

$$\frac{d}{dz} f = \partial_1 \operatorname{Re} f + i\,\partial_1 \operatorname{Im} f \qquad \left(\frac{d}{dz} f = \text{Kompl. Abl.} \right).$$

Mithin sind die gemäß (1) zu F assoziierten Funktionen gerade unsere vorgegebenen holomorphen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, und aus den Bedingungen (4) lesen wir mit unseren Vorüberlegungen ab:

Die in (5) definierte Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist harmonisch, erfüllt die Konformitätsrelation und hat überall maximalen Rang. Allerdings handelt es sich bei F im allgemeinen nicht um eine Parametrisierung der Bildmenge $F(\Omega)$, denn über globale Injektivität von F wird ja nichts ausgesagt. Mit anderen Worten: $F(\Omega)$ kann durchaus Selbstdurchschneidungen haben und ist dann gar keine Mannigfaltigkeit! (F ist lediglich eine [konforme] Immersion.) Immerhin läßt sich folgendes sagen: Ist $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig, so folgt aus Rang $DF(x_0,y_0) = 2$ die Existenz einer kleinen Umgebung Ω' von (x_0,y_0) in Ω, so daß $F|_{\Omega'}$ das Gebiet $F(\Omega')$ regulär parametrisiert; folglich ist $F(\Omega')$ eine Mannigfaltigkeit mit verschwindender mittlerer Krümmung, und das ganze Bild $F(\Omega)$ ist aus solchen Stücken von Minimalflächen zusammengesetzt. Wir halten fest

LEMMA 3.4: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. $\phi_k : \Omega \to \mathbb{C}$ seien auf Ω holomorph mit

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 = 0, \qquad \sum_{k=1}^{3} |\phi_k(z)|^2 > 0 \quad , z \in \Omega.$$

Man setzt (bis auf Konstanten)

$$F_k(z) := \operatorname{Re} \int^{z} \phi_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 1,2,3.$$

Dann ist für genügend kleine Teilgebiete Ω' von Ω $F(\Omega')$ eine Minimalfläche, die durch $F|_{\Omega'}$ regulär konform parametrisiert wird. Für injektives F ist sogar das ganze Bild $F(\Omega)$ eine Minimalfläche.

BEMERKUNG: Verzichtet man auf die Forderung $\sum_{k=1}^{3} |\phi_k(z)|^2(z)$

$=: \textcircled{\sim}(z) > 0$ in jedem Punkt, so bedeutet dies, daß es $z \in \Omega$ gibt mit

$$\text{Rang } DF(z) < 2 \iff \partial_1 F(z) \wedge \partial_2 F(z) = 0 \iff$$

$$\partial_1 F(z) = \partial_2 F(z) = 0 \qquad \text{(Konformitätsrelation)}$$

Solche Punkte nennt man <u>Verzweigungspunkte von F</u>. Verzweigungspunkte sind offenbar genau die gemeinsamen Nullstellen von ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, die nach bekannten Sätzen über holomorphe Funktionen in Ω isoliert liegen, sich also nicht im Inneren von Ω sondern nur zum Rand $\partial\Omega$ hin häufen können, vorausgesetzt nicht alle drei Funktionen ϕ_k, $k=1,2,3$, sind identisch 0.

<u>ZUSATZ (zu LEMMA 3.4)</u>: Seien $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht identisch 0, mit

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 \equiv 0.$$

Dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\Lambda \subset \Omega$ ohne Häufungspunkte in Ω, so daß $F(\Omega')$ für genügend kleine Gebiete $\Omega' \subset \Omega - \Lambda$ eine regulär parametrisierte Minimalfläche ist.

$\blacksquare$

Diese Erkenntnis bringt uns natürlich der Lösung des Plateau Problems (Konstruktion von Minimalflächen zu gegebener Berandung Γ) in keiner Weise näher, immerhin sind wir jetzt in der Lage, durch Angabe holomorpher Funktionen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 mit $\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 \equiv 0$ eine Vielzahl von Flächen mit Krümmung 0 zu definieren. Das führt letztendlich auf